Краткие сообщения ОИЯИ №12-85 JINR Rapid Communications No.12-85
УДК 530.145

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АКСИАЛЬНО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Б.Н.Захарьев, Х.Функе

В литературе по обратной задаче до сих пор не существует практических методов для восстановления сферически-несимметричных потенциалов из асимптотической волновой функции. Оказывается, эта проблема решается в специальных случаях. Для класса потенциалов, допускающих разделение переменных в сфероидальных координатах, предложены методы их восстановления по данным рассеяния. Это первый случай практически реализуемых алгоритмов решения обратной задачи для сферически-несимметричных локальных потенциалов. Рассматривается модификация формализма Редже - Ньютона - Сабатье и конечно-разностного приближения Хушияра - Разави.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Inverse Problem for Axial-Deformed Potentials

B.N.Zakhariev, Ch.Funke

In the literature about Inverse Problems there are no tractable methods for construction of nonspherical potentials from the asymptotic wave function. This problem turned out to be solved in special cases. The methods of reconstruction from scattering data are given for the class of potentials admitting the separation of variables in spheroidal coordinates. This is the first case when the algorithms of the inverse problem solution for spherically-nonsymmetrical local potentials can practically be realised. The modifications of the formalisms of Regge - Newton - Sabatier and finite-difference approximation of Hooshyar - Rasavy are considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Введение

Попытки решения обратной задачи при нарушении сферической симметрии потенциала делались уже в течение ряда лет. Конечно-разностную модель многомерной обратной задачи исследовали Березанский с сотрудниками [1,2]. Нелокальные по углам потенциалы рассматривались Кеем и Мозесом [3]. Общую теорию восстановления трехмерных потенциалов предложили Фаддеев [4] и Ньютон [5]. Об этих подходах можно также прочитать в книгах [6-8].

Почему-то до сих пор не рассматривалась еще одна возможность: сведение задачи к одномерной, когда переменные разделяются в сфероидальных, эллиптических /и др.?/ координатах. Недавно были построены сфероидальные потенциалы баргмановского типа, специальные их случаи дают точно решаемые модели со связанными состояниями в непрерывном спектре. В данной работе формулируется соответствующая обратная задача при фиксированной энергии - модифицированный метод Редже - Ньютона - Сабатье [6,9] и алгоритм ее решения в приближении конечных разностей, распространяющий подход Хушияра и Разави [10] на аксиально-деформированные мишени. Спецификой одномерных парциальных уравнений движения, к которым сводится уравнение Шредингера со сфероидальными потенциалами, является зависимость от энергии орбитального параметра $\lambda_{\ell m}(a^2k^2)$, переходящего в $\ell(\ell+1)$ в пределе сферической симметрии. Это, в частности, препятствует созданию аналога теории Гельфанда - Левитана - Марченко с фиксированным значением ℓ.

Разделение переменных

В сфероидальных координатах ξ, η, ϕ /см. рисунок/ потенциалы вида [1]

$$v(\xi,\eta)=\frac{1}{a^2}\,\frac{u_1(\xi)+u_2(\eta)}{\xi^2-\eta^2} \qquad /1/$$

допускают сведение уравнения Шредингера для

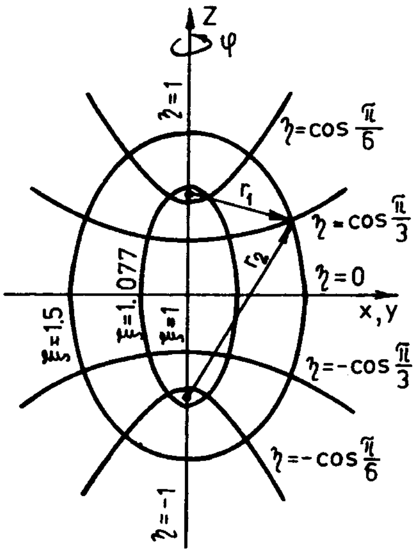
$$\psi=(\xi^2-1)^{1/2}\,R(\xi)\,S(\eta)\,\ell^{im\phi}$$

к одномерным уравнениям $(1\le\xi<\infty;\ -1\le\eta\le1;\ 0\le\phi\le2\pi)$:

$$R''(\xi)+\Big[a^2k^2-\frac{\lambda_{\ell m}(a^2k^2)}{\xi^2-1}-\frac{u_1(\xi)}{\xi^2-1}+\frac{1-m^2}{(\xi^2-1)^2}\Big]R(\xi)=0\,; \qquad /2/$$

$$\frac{d}{d\eta}(1-\eta^2)\frac{d}{d\eta}S(\eta)+\Big[\lambda_{\ell m}(a^2k^2)-u_2(\eta)+a^2k^2(1-\eta^2)- \qquad /3/$$

$$-\frac{m^2}{1-\eta^2}\Big]S(\eta)=0\,.$$



Здесь a - расстояние между фокусами эллипсов /центрами в двухцентровой задаче/, ξ - "радиальная" переменная, характеризующая размер эллипса, η - "угловая" переменная, определяющая положение точки на эллипсе, ϕ - угол вращения вокруг оси эллипса. В дальнейшем мы будем полагать $u_2(\eta) = 0$, так как особенно интересно "радиальное" движение. Для восстановления $u_1(\xi)$ достаточно данных рассеяния с частицами, падающими на мишень вдоль ее оси симметрии, поэтому можно положить также и $m = 0$. Собственные значения при $a = 0$ /сферическая симметрия/ сразу находятся из /3/: $\lambda(a=0) = \ell(\ell+1)$. Вообще же, нужно различать два случая: 1/ $k^2 < 0$, когда спектр дискретный, k^2 и λ вычисляются при совместном решении /2,3/; 2/ $k^2 > 0$, спектр непрерывный и k^2 можно рассматривать как произвольный параметр, а $\lambda_{\ell m}$ определяются из одного уравнения /3/.

Модификация метода Ньютона - Сабатье

В уравнении типа уравнения Гельфанда - Левитана

$$K(\xi,\xi') + Q(\xi,\xi') + \int_1^{\xi} K(\xi,\xi'')\,Q(\xi'',\xi')\frac{d\xi''}{\xi''^2 - 1} \qquad /4/$$

возьмем ядро в виде $Q(\xi,\xi') = \sum_\ell c_\ell \mathring{\phi}_\ell(\xi)\mathring{\phi}_\ell(\xi')$, тогда для K получим

$$K(\xi,\xi') = -\sum_\ell c_\ell \phi_\ell(\xi)\mathring{\phi}_\ell(\xi'), \qquad /5/$$

где $\mathring{\phi}$, ϕ - решения /2/, регулярные при $\xi \to 1$, отвечающие потенциалам $\mathring{u}_1$ и u_1 соответственно и связанные операцией обобщенного сдвига

$$\phi_\ell(\xi) = \mathring{\phi}_\ell(\xi) + \int_1^{\xi} K(\xi,\xi')\mathring{\phi}_\ell(\xi')\frac{d\xi'}{\xi'^2-1}. \qquad /6/$$

Подставляя /5/ в /6/, получаем систему алгебраических уравнений для ϕ_ℓ.

$$\phi_\ell(\xi) = \overset{\circ}{\phi}_\ell(\xi) - \xi \sum_{\ell'} \phi_{\ell'}(\xi) L_{\ell\ell'}(\xi) , \qquad /7/$$

где $L_{\ell\ell'}(\xi) = \int\limits_1^{\xi} \overset{\circ}{\phi}_\ell(\xi) \overset{\circ}{\phi}_{\ell'}(\xi')(\xi'^2-1)^{-1} d\xi'$. Постоянные коэффициенты c_ℓ в /5-7/ определяются данными рассеяния, если перейти в /7/ к пределу больших ξ. Хотя $\phi_\ell(\xi)$ нам заранее не известны, но их асимптотическое поведение задается парциальными фазами рассеяния δ_ℓ /12/:

$$\phi_\ell(\xi) \underset{\xi \to \infty}{\sim} \frac{1}{ak} \sin(ak\xi - \frac{\pi \ell}{2} + \delta_\ell) . \qquad /8/$$

с константами c_ℓ, найденными из алгебраических уравнений /6,7,9/,

$$\phi_\ell^\infty(\xi) = \overset{\circ}{\phi}{}_\ell^\infty(\xi) - \sum_\ell L_{\ell\ell'}^\infty c_{\ell'} \phi_{\ell'}^\infty(\xi) . \qquad /9/$$

Получаем из /7/ волновые функции

$$\phi_\ell(\xi) = \sum_{\ell'} (M^{-1}(\xi))_{\ell\ell'} \overset{\circ}{\phi}_{\ell'}(\xi) ; \quad M_{\ell\ell'} = \delta_{\ell\ell'} + L_{\ell\ell'}(\xi) . \qquad /10/$$

которые, согласно /5/, задают ядро K, диагональные значения которого определяют потенциал

$$u_1(\xi) = \overset{\circ}{u}_1(\xi) - 2\sqrt{\xi^2 - 1} \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} K(\xi,\xi) . \qquad /11/$$

Конечно-разностное приближение

Для установления параллелей со случаем сферической симметрии удобнее пользоваться вместо ξ переменной $\rho = a\sqrt{\xi^2 - 1}$, которая, подобно радиусу, изменяется от нуля. Перепишем уравнение /2/ в виде

$$R''(\rho) + [k^2 - \frac{\lambda + u_1(\rho)}{\rho^2 + a^2} - \frac{a^2}{\rho^2(\rho^2 + a^2)} (m^2 - \frac{2\rho^2 - a^2}{4(\rho^2 + a^2)}) R(\rho) = 0 . \qquad /12/$$

В случае малой деформации мишени $a^2/\rho^2 \ll 1$ уравнение /12/ переходит в

$$R''(\rho) + \{k^2 - u(\rho) - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} + \frac{a^2}{\rho^2}[u(\rho) + \frac{\ell(\ell+1) - m^2 - 1/2}{\rho^2} - k^2\sigma^2]\} R(\rho) = 0 , \qquad /13/$$

где $u(\rho) = u_1(\rho)/\rho^2$; $\lambda_\ell \approx \ell(\ell+1) + ak^2\sigma$; $\sigma = \dfrac{2\ell(\ell+1) - 2m^2 - 1}{(2\ell - 1)(2\ell + 3)}$.

Следуя работе [10], преобразуем /12/, заменяя $R(\rho)=\rho^{\ell+1}\chi(\rho)$:

$$\chi_\ell''(\rho)+\frac{2}{\rho}(\ell+1)\chi_\ell'(\rho)+(k^2-w)\chi_\ell(\rho)=0, \qquad /14/$$

где $w(\rho)=\dfrac{u_1(\rho)+\lambda}{\rho^2+a^2}-\dfrac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}+\dfrac{a^2(2\rho^2-a^2)}{4\rho^2(\rho^2+a^2)}$, а $\lambda_\ell(a^2k^2)$ известны из /3/. Переходя к дискретной переменной $\rho_n=n\Delta$ / $n=1,2,\ldots,$; Δ - шаг конечно-разностного дифференцирования/, получаем разностный аналог уравнения /14/

$$\chi_\ell(n+1)=A_\ell(n)\chi_\ell(n)+c_\ell(n)\chi_\ell(n-1), \qquad /15/$$

где $c_\ell(n)\cdot\dfrac{\ell+1-n}{\ell+1+n}$; $\quad A_\ell(n)=n[2-\Delta^2(k^2-w_n)]/(\ell+1+n)$.

Важным для обратной задачи свойством уравнения /15/ является обращение в нуль коэффициента $c_\ell(n)$ при $n=\ell+1$, так что, меняя ℓ, можно добиться исчезновения $c_\ell(n)$ в любой точке интервала взаимодействия. Действительно, воспользуемся этим для восстановления $u_1(n)$ по фазовым сдвигам δ. Пусть $u_1=0$ при $n>N$, тогда $\chi_\ell(n)$ нам известны в этой области, включая ее границу $n=N$, поскольку там $\chi_\ell(n)$ - свободная волна, определяемая заданными δ_ℓ. В уравнении /15/ при $\ell=L=N-1$ и $n=N$ коэффициент при неизвестной $\chi_L(N-1)$ исчезает: $c_L(N)=0$, так что можно выразить $A_L(N)$, в который входит неизвестная $u_1(N)$ через известные $\chi_L(N)$ и $\chi_L(N+1)$. Теперь возьмем значение ℓ на единицу меньшим $\ell=L-1=N-2$. Исходя из δ_{L-1} и пользуясь тем, что $u_1(N)$, а значит и $A_{L-1}(N)$ уже известны, определим $\chi_{L-1}(N-1)$ из /15/ с $n=N$. Тогда в /15/ с $n=N-1$ исчезает $c_{N-2}(N-1)$, и мы находим $A_{N-2}(N-1)$, т.е. $u_1(N-1)$. Продолжая этот процесс, будем углубляться на шаг внутрь области взаимодействия, решая уравнения /15/ с каждым новым, уменьшенным на единицу значением ℓ. Общее выражение для очередного искомого значения $A_\ell(n)$, где $\ell_j=N-j$, $j=1,2,\ldots N$, можно представить в виде непрерывной дроби [10].

$$A_{\ell_{j+1}}(N-j)= \qquad /16/$$

$$=\frac{c_{\ell_{j+1}}(N+1-j)}{-A_{\ell_{j+1}}(N+1-j)+}\;\frac{c_{\ell_{j+1}}(N+2-j)}{-A_{\ell_{j+1}}(N+2-j)+}\cdots\frac{c_{\ell_{j+1}}(N)}{\chi_{\ell_{j+1}}(N+1)/\chi_{\ell_{j+1}}(N)-A_{\ell_{j+1}}(N)}$$

откуда находим $u_1(N-j)$.

Заключение

В настоящее время предложенными методами проводятся расчеты с целью оценки устойчивости процедуры построения потенциалов по фазам. Интересно было бы также восстановить потенциал вращающейся мишени /учет вращения ядер/, рассмотреть обратную задачу для сплюснутой сфероидальной мишени и для случая разделения переменных в эллиптических координатах.

Авторы признательны В.Н.Пивоварчику, обратившему внимание на разделение переменных в координатах ξ, η, ϕ, А.А.Сузько за полезные дискуссии, Н.Ф.Трусовой за обсуждение вопросов полноты собственных функций в двухцентровой задаче и В.И.Климову за помощь в простой интерпретации теоремы Котельникова, позволяющей глубже понять подход Хушияра и Разави и найти его обобщения.

Литература

1. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. "Наукова думка", Киев, 1965.
2. Эскина М.С. Труды семинара по функциональному анализу. Изд-во Ин-та матем. АН УССР, Киев, 1970, т.2, с.207.
3. Kay T., Moses M.E. Nuovo Cim., 1961, 22, p.689; Comm.Pure Appl.Math., 1961, 14, p.435.
4. Фаддеев Л.Д. В кн.: Современные проблемы математики. Изд-во ВИНИТИ, М., 1974, т.3, с.93.
5. Newton R. J.Math.Phys., 1982, 23, No.4, p.594.
6. Шадан К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. "Мир", М., 1980.
7. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. "Мир", М., 1969.
8. Захарьев Б.Н., Сузько А.А. Потенциалы и квантовое рассеяние /прямая и обратная задачи/. Энергоатомиздат, М., 1985.
9. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма - Лиувилля. "Наука", М., 1984.
10. Hooshyar M.A., Razavy M. Can.J.Phys., 1981, vol.59, No.11, p.1627.
11. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. "Наука", М., 1976; Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. ИЛ, М., 1958, т.1, с.612.
12. Абрамов Д.И. ТМФ, 1975, 22, №2, с.253; Вестн.ЛГУ, 1975, №22, с.24.
13. Захарьев Б.Н. Сузько А.А. ЯФ, 1975, 22, №2, с.289.

Рукопись поступила 4 октября 1985 года.